

*) Όμοια ισχύει για $x^2, \dots$

Επομένως οριακά προκύπτει:

$$\begin{cases} x^0 & \lambda q_0 = \tau \mu q_1 \\ x^1 & (\lambda + \tau \mu) q_1 = \tau \mu q_2 \\ & \vdots \\ x^{c-1} & (\lambda + \tau \mu) q_{c-1} = \tau \mu q_c \\ x^c & (\lambda + \tau \mu) q_c = \tau \mu q_{c+1} + \lambda q_0 \\ x^{c+1} & (\lambda + \tau \mu) q_{c+1} = \tau \mu q_{c+2} + \lambda q_1 \\ & \vdots \\ x^n & (\lambda + \tau \mu) q_n = \tau \mu q_{n+1} + \lambda q_{n-c} \quad n \geq c \end{cases}$$

Μπορώ να φτάσω στο σύστημα χωρίς να κοίνω τα παραπάνω:
ΒΓΑΙΝΕΙ ΣΤΟ 0 = ΜΠΑΙΝΕΙ ΣΤΟ 0.
 $0 \leftarrow 1 \rightarrow 2$

Λύση του
συστήματος

Μέθοδος της γεννήτριας

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j x^j, \quad |x| < 1$$

Πολλίω με $x^0, x^1, x^2, \dots$

• Πράξεις 1^ο μέλος: $\lambda (q_0 x^0 + q_1 x^1 + \dots + q_{c-1} x^{c-1} + \dots + q_n x^n + \dots) + \tau \mu (q_1 x^1 + x^{c-1} q_{c-1} + \dots)$
 $= \lambda Q(x) + \tau \mu (Qx - q_0)$

• Πράξεις 2^ο μέλος: $z\mu(q_1x^0 + q_2x^1 + \dots + q_{n+1}x^n + \dots) + \lambda(q_0x^z + q_1x^{z+1} + \dots)$

$$\begin{aligned} Q(x) = q_0x^0 + q_1x^1 + \dots &= \frac{z\mu}{x}(q_1x^1 + q_2x^2 + \dots) + \lambda x^z(q_0x^0 + q_1x^1 + \dots) \\ &= \frac{z\mu}{x}(Q(x) - q_0) + \lambda x^z Q(x) \end{aligned}$$

Άρα:

$$\lambda Q(x) + z\mu(Q(x) - q_0) = \frac{z\mu}{x}(Q(x) - q_0) + \lambda x^z Q(x)$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{-\frac{z\mu}{x}q_0 + z\mu q_0}{\lambda + z\mu - \frac{z\mu}{x} - \lambda x^z} \Rightarrow$$

$$Q(x) = \frac{z\mu q_0 x - z\mu q_0}{\lambda x + z\mu x - z\mu - \lambda x^{z+1}} \Rightarrow$$

$$Q(x) = \frac{z\mu q_0(1-x)}{\lambda x^{z+1} - (\lambda + z\mu)x + z\mu}$$

Είναι όμως $Q(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j x^j$

και $Q(1) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j = 1$

Από την σχέση $Q(x) = \frac{z\mu q_0(1-x)}{\lambda x^{z+1} - (\lambda + z\mu)x + z\mu}$

Παίρνω Hospital

$$\frac{-z\mu q_0}{\lambda(z+1)x^z - (\lambda + z\mu)}$$

οπότε είναι: $1 = \frac{-z\mu q_0}{\lambda(z+1) - (\lambda + z\mu)} = \frac{-z\mu q_0}{\lambda z - z\mu}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{-z\mu q_0}{-z(\mu - \lambda)} = \frac{\mu q_0}{\mu - \lambda} \Rightarrow q_0 = \frac{\mu - \lambda}{\mu} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho$$

Επομένως $Q(x) = \frac{z\mu(1-x)(1-\rho)}{\lambda x^{z+1} - (\lambda + z\mu)x + z\mu}$

Αποδεικνύεται (Θ. Rouché) ότι ο παρονομαστής έχει πλην της μονάδας άλλες z διακτικές ρίζες τις $x_1, x_2, \dots, x_r$ με $|x_j| > 1$.

Έτσι ο παρονομαστής είναι:

$$\lambda(x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_r - x)(1 - x)$$

Επομένως

$$Q(x) = \frac{\tau \mu (1-x)(1-p)}{\lambda(x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_r - x)(1 - x)}$$

Ισχύει ότι $x_1 \dots x_r$ $\frac{\text{γινόμενο}}{\text{ριζών}} = \frac{\tau \mu}{\lambda}$

Άρα

$$Q(x) = \frac{x_1 \dots x_r (1-p)}{(x_1 - x) \dots (x_r - x)} \Rightarrow Q(x) = \frac{x_1 \dots x_r (1-p)}{x_1 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \dots x_r \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)} \Rightarrow$$

$$Q(x) = \frac{1-p}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)}$$

Όμως τότε το $Q(x)$ μπορεί να γραφεί:

$$Q(x) = (1-p) \left[\frac{A_1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \dots + \frac{A_r}{1 - \frac{x}{x_r}} \right]$$

όπου τα A_i μπορούν να βρεθούν αν αναλυθεί σε

παράγοντες: $A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \frac{1}{1 - \frac{x_j}{x_i}}$

$$\text{Τότε } Q(x) = (1-p) \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{1 - \frac{x}{x_i}} \quad \frac{x}{x_i} < 1$$

$$\text{Όπως } \left(1 - \frac{x}{x_i}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_i}\right)^j$$

και επομένως

$$Q(x) = (1-p) \sum_{i=1}^{\tau} A_i \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_i}\right)^j$$

από όπου καθώς

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j x^j \text{ είναι } q_j = (1-p) \sum_{i=1}^{\tau} A_i \frac{1}{x_i^j}, \quad j=1,2,$$

$$q_0 = (1-p)$$

Εύρεση P_n

$$P_0 = q_0 = 1-p$$

$$P_k = \sum_{l=\tau(k-1)+1}^{\tau k} q_l \Rightarrow P_k = (1-p) \sum_{l=\tau(k-1)+1}^{\tau k} \sum_{i=1}^{\tau} A_i \frac{1}{x_i^l} \quad k=1,2,\dots$$

Σύστημα $M^{[x]}/M/1/\infty$

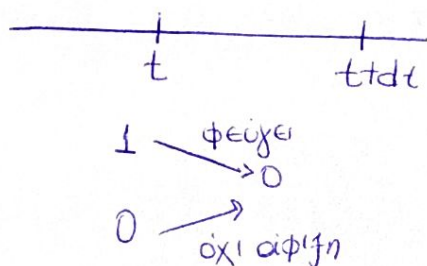
Θεωρούμε τώρα ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπάλληλο αίθρια χωρητικότητα, ο υπάλληλος εξυπηρετεί με $\text{ΕΚΘ}(\mu)$, ενώ σε κάθε αίτηση έρχονται X πελάτες όπου X είναι μια τμ με συνίστη πιθανότητα.

$$P(X=i) = g_i \quad \text{τ/ω} \quad \sum_{i=1}^{\infty} g_i = 1 \quad i=1,2,3,\dots$$

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε αίτηση μπορεί να έρθει η ένας πελάτης με πιθανότητα g_1 ή δυο πελάτες με πιθανότητα g_2 κ.ο.κ

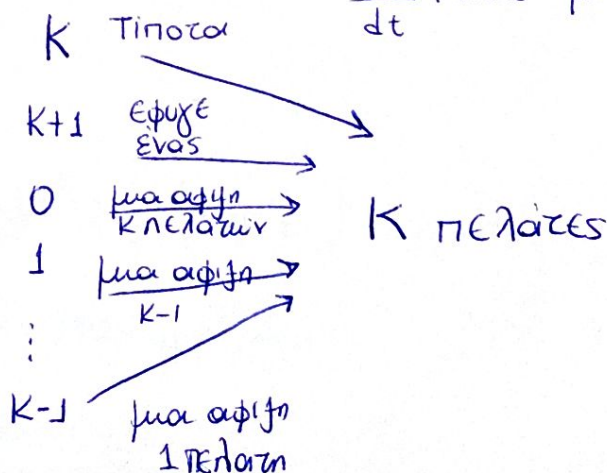
Έστω $J(t)$ ο αριθμός των πελατών τη χρονική στιγμή t στο σύστημα.

$$P_K(t) = P[J(t) = K / J(0) = 0] \quad \text{και} \quad P_K = \lim_{t \rightarrow \infty} P_K(t).$$



$$P_0(t+dt) = P_0(t) [1 - \lambda dt] + P_1(t) \mu dt \Rightarrow \frac{P_0(t+dt) - P_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = \mu P_1(t). \quad (1)$$



$$P_k(t+dt) = P_0(t) g_k \lambda dt + P_1(t) g_{k-1} \lambda dt + \dots$$

$$+ P_{k-1}(t) g_1 \lambda dt + P_k(t) [1 - (\lambda + \mu) dt] + P_{k+1}(t) \mu dt$$

$$\Rightarrow \frac{P_k(t+dt) - P_k(t)}{dt} + (\lambda + \mu) P_k(t) = \lambda \sum_{i=0}^{k-1} P_i(t) g_{k-i} + \mu P_{k+1}(t). \quad (2) \quad k=1, 2, \dots$$

Επομένως για τις καταστάσεις σε κατάσταση ουλής ισορροπίας

από ① $\boxed{\lambda P_0 = \mu P_1}$

και

από ② $\boxed{(\lambda + \mu) P_k = \mu P_{k+1} + \lambda \sum_{i=0}^{k-1} P_i g_{k-i}} \quad k=1, 2, \dots$

ή αναλυτικότερα

$$\begin{aligned} X^0 & \quad \lambda P_0 = \mu P_1 \\ X^1 & \quad (\lambda + \mu) P_1 = \mu P_2 + \lambda P_0 g_1 \\ X^2 & \quad (\lambda + \mu) P_2 = \mu P_3 + \lambda P_1 g_1 + \lambda P_0 g_2 \\ X^3 & \quad (\lambda + \mu) P_3 = \mu P_4 + \lambda P_2 g_1 + \lambda P_1 g_2 + \lambda P_0 g_3 \\ & \quad \vdots \\ X^k & \quad (\lambda + \mu) P_k = \mu P_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda g_{k-i} P_i \end{aligned}$$

Μέθοδος γεννήτριας $P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k x^k$

$$G(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k x^k$$

$$\lambda P(x) + \mu (P(x) - P_0) = \frac{\mu}{x} (P(x) - P_0) + \lambda x g_1 (P_0 + P_1 + \dots) + \lambda g_2 x^2 (P_0 + P_1 + \dots) + \dots$$

$$\Rightarrow \lambda P(x) + \mu (P(x) - P_0) = \frac{\mu}{x} (P(x) - P_0) + \lambda x g_1 P(x) + \lambda g_2 x^2 P(x) + \dots$$

$$\Rightarrow \lambda P(x) + \mu (P(x) - P_0) = \frac{\mu}{x} (P(x) - P_0) + \lambda P(x) G(x)$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{\mu p_0 - \frac{\mu}{x} p_0}{\mu + \lambda - \frac{\mu}{x} - \lambda G(x)} \Rightarrow$$

$$P(x) = \frac{\mu p_0 x - \mu p_0}{(\mu + \lambda)x - \mu - \lambda x G(x)} \Rightarrow P(x) = \frac{\mu(1-x)p_0}{\mu(1-x) - \lambda x(1-G(x))}$$

$$\text{όμως } P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k$$

$$\Rightarrow P(1) = 1$$

Παίρνω Hospital: $\frac{-\mu p_0}{-\mu - \lambda + \lambda x G'(x) + \lambda G(x)}$

Άρα για $x=1$ είναι: $1 = \frac{-\mu p_0}{-\mu - \lambda + \lambda G'(1) + \lambda G(1)}$

$$\text{όμως } G(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k x^k$$

Άρα $G(1) = 1$

$$G'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k g_k x^{k-1}$$

$$G'(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k g_k \quad \text{αίρα } G'(1) \text{ είναι μέση τιμή της } x.$$

Επομένως $1 = \frac{-\mu p_0}{-\mu - \lambda + \lambda G'(1) + \lambda} \Rightarrow 1 = \frac{\mu p_0}{\mu - \lambda G'(1)} \Rightarrow$

$$p_0 = \frac{\mu - \lambda G'(1)}{\mu} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} G'(1)$$

Αρα
$$P(x) = \frac{\mu(1-x) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} G'(1)\right)}{\mu(1-x) - \lambda x(1-G(x))}$$